Allgemeine Infinitesimalgeometrie u. Erfahrung. 1.

von W. Wirtinger in Wien.

~~Die folgenden D. Darlegungen sind so aber mit einem~~

1.) Die folgenden Darlegungen sind ~~keineswegs~~ einem Kreis von sehr verschiedenartigen Problemen geordnet, von denen ~~die~~ der grösste Theil mathematischer Art ist, ~~die aber~~ zu deren Stellung und Bearbeitung ~~aber~~ ich aber von allgemeineren ~~Pt~~ Überlegungen aus ~~geleitet~~ geführt wurde, welche enge mit ~~den Problem Prob~~ Gedanken über die Art der geistigen ~~Erfahr~~ Verarbeitung unserer Sinneserfahrung zusammenhängen. Es liegt mir völlig ~~ferner einer~~ die Aufstellung abgeschlossener ~~Theorie~~ Lehrgebäudes über dieses Problem auch nur zu versuchen. ~~oder~~ Vom naiven Realismus angefangen, der die Dinge so nimmt, wie die Sinneseindrücke ~~so~~ von ~~Ih~~ ihnen berichten, ~~bis herauf zum Solipsismus, der alles nur als Vorstell~~ den cartesianischen Zweifeln, dem englischen Sensualismus bis herauf zum Solipsismus, der alles nur als Vorstellung oder doch geistiges Erlebnis des Individuums ~~auff~~ gelten lassen will, sind hier so viele ~~und zum grossen Theil~~ Möglichkeiten entwickelt und kritisiert worden, ~~zum gross~~ mit Argumenten, welche zum grossen Theil schon im antiken Pyrrhonianismus u. Skeptizismus, ~~vor~~ zum Theil noch früher vorgebildet sind, dass es als ~~bis~~ Anmassung erscheinen würde, vom Boden ~~einer~~ der Schulung in einer einzigen Wissenschaft aus hier ~~wo die~~ einen Abschluss zu versuchen.

Am ehesten würde ich nach dem ~~indischen Gedanken~~ meines Wissens ~~aus Ind~~ in Indien vertretenen Gedankengang zustimmen, der besagt, dass wir zwar dermalen keine Einsicht in das wahre Wesen der Dinge haben, ~~ki~~ aber dass [vielleicht] es möglich ist, durch fortwährende Ausbildung unserer Fähigkeiten einer solchen Einsicht näher zu kommen. ~~Wenn~~ Vielleicht ~~ist~~ [hat] der unleugbare Trieb nach wissenschaftlicher Erkenntnis u. ~~alle unsere Arbeit~~ geistiger Arbeit ~~nur ein solches Ausbilden oder Weg zu solcher Ausbildung, denen ist dann freilich nicht eine~~ [mystischen Inhaltes] ~~ein mittheilbare mystische~~ Einsicht ~~wäre sein dürfte~~. ~~nur ein~~ seine Wurzel in einem solchen Glauben und ~~die~~ ist ein Suchen nach diesem Ziel.

~~Aber bei allen~~

~~Bei~~ Dabei nimmt nun die Mathematik eine eigentümliche Stellung ein. ~~Auf der einen Seite entweder werden ihr stehen ihr stehen ihre Fragestellungen dem Ursprung nach in~~ Ihre Anfänge, das Zählen und Messen weisen auf ihren Ursprung unter dem Einfluss der ~~prä~~ einfachsten Erfahrungen hin, ihre Fragestellungen entspringen häufig ~~einem Bedürfnis~~ aus der Aussenwelt, aber sie gewinnen bald ~~eine durch das~~ unter dem Einfluss ~~ästh~~ ästhetischer u. methodischer Interessen eine ganz eigenartige, zunächst der Wirklichkeit wenigstens scheinbar abgewandte Gestalt [in Wechselwirkung] ~~um dann oft~~ unerwartet [schliesslich] ~~wieder~~ Anwendung zu finden und [überraschende] ~~neue~~ Anregung zu geben. Schon die antike Überlieferung weist auf beides hin, wenn einmal die Geometrie in Aegypten aus den Bedürfnissen der Landmessung entstanden sein soll und nach dem hausbackenen Urteil des Sokrates, die höheren Fragen nur von wichtigeren Dingen abhalten, das andere mal aber nach Aristoteles sie ihren Ursprung dem Umstand verdanken soll, dass die aegyptischen Priester Musse hatten darüber nachzudenken.

Wie dem nun auch sei, jedenfalls möchte ich mich der Mathematik als eines vorhandenen und weit ausgebildeten Hilfsmittels zur ~~Beschreibung~~ ~~Darstellung und~~ genaueren ~~Darstellung der im folgenden zu entwickelnden Gedanken~~ Darstellung der im folgenden zu entwickelnden Gedanken bedienen, ~~ohne damit etwa behaupten zu wollen~~ diesen Ergebnissen auch ein gewisses Gewicht ~~immer~~ beizulegen ist, ohne damit ~~behaupten~~ den Anspruch zu erheben, dass sie schon an sich ein oberstes Gesetz ~~der Dinge gebe~~ ~~es~~ und eine Richtschnur (oder besser der Erfahrung von den Dingen) für die geistige Verarbeitung der Dinge ~~geben~~ sei. (für eine solche Erfahrung)

2.) Eine erste Forderung ist jedenfalls ein einigermassen genaues Erinnerungsvermögen, welches uns gestattet ~~erst~~ verschiedene Wahrnehmungen mit einander zu vergleichen, ~~und~~ und zwar auch dann, wenn wir uns auf Messungen beschränken und diese im Sinne Einsteins als Coinsidenzen auffassen. Denn auch die Vergleichung verschiedener Coinsidenzen, die wir nicht gleichzeitig wahrnehmen, ist an das Gedächtnis gebunden.

~~Dazu~~ Dazu kommen noch Nachrichten, die wir von andern über ihre Wahrnehmungen erhalten. Dabei kommen allerdings nur diese Nachrichten als Wahrnehmungen in unser Bewusstsein, aber wir beziehen sie irgendwie auf der Hauptsache nach ähnliche Vorgänge, wie unsere eigenen Wahrnehmungen ~~und~~ oder suchen sie durch Wiederholung ähnlicher unserer ~~Bewusstsein~~ eigenen ~~einzuordnen~~ ~~an~~ zu gliedern. Beziehen sich diese auf Messungen, so stimmen diese entweder unter einander überein oder aber, ~~und dann~~ das ist öfter der Fall, sie zeigen ~~eine~~ gewisse ~~f~~ Abweichungen gegeneinander, die wir in Beziehung zu setzen suchen. Sind die ~~Bei~~ Beobachtungen, ~~genügend nahe nicht zu weit entlegen – eine Aussage, die immer~~ also die Zahlenergebnisse, nicht zu sehr abweichend, so bedienen wir uns seit altersher der linearen Interpolation, um sie aufeinander ~~zu beziehen~~ oder ein ausgewähltes ~~festes~~ ~~fl~~ veränderliches System zu beziehen.

So, wenn der Anfang des Jahres, ~~bestimmt~~ der Durchgang der Sonne durch den Frühlingsnachtgleichenpunkt bestimmt wird. Das ausgewählte veränderliche System ist dabei zunächst ~~der Fixsternhimmel~~ ~~die Lage des Fix~~ die Stellung des Fixsternhimmels zum irdischen Horizont, die verschiedenen Beobachtungen, die scheinbaren Orte der Sonne am Fixsternhimmel ~~in den~~ dem Durchgang benachbarten Tagen

und hieraus wird in erster grober Annäherung durch lineare Interpolation ~~die gegenwärtige Lage~~ die Lage des Fixsternhimmels zum Horizont, ~~[illegible]~~ d. h. die Zeit im Augenblicke des Durchgangs der Sonne durch den Aequator bestimmt. Die ~~[illegible]~~ ersten Bestimmungen des Vorrückens der Nachtgleichen bilden wieder ein Beispiel solcher linearen Interpolation, bei der die ~~Beobachteten~~ Beobachtungen zwar zeitlich weit auseinanderliegen aber doch ~~[illegible]~~ in anderer Beziehung die Änderung so klein ist, dass lineare Interpolation angewendet werden kann.

Die begriffliche Verarbeitung ~~[illegible]~~ der linearen Interpolation, insbesondere aber die Bemerkung, dass sie um so genauer wird, je kleiner das Intervall ist führt zur ~~Dif~~ ~~Ausbildung und Anwendung der Differentialrechnung~~ zunächst vorstellungsmässigen und naiven Differentialrechnung und ihrer weiteren Ausbildung.

Aber die Methode der linearen Interpolation kann noch eine andere Anwendung finden. Wenn man nämlich auf einen ~~gewissen Complex~~ bestimmten Complex von Erscheinungen seine Aufmerksamkeit richtet, so beobachtet man, dass zwar ein Theil der Beobachtungen und Messungen sich innerhalb dieses Complexes abspielt, daneben aber noch andere ~~vorhanden sein~~ Beziehungen vorhanden sind, deren ~~Einfluss~~ Ursache ausserhalb des beobachteten Complexes ~~Zu [illegible]~~ oder aber unbekannt ist. Wir mögen dann in erster Annäherung diese unbekannten Einflüsse als lineare Funktionen [illegible] ansetzen [illegible]. Wenn wir diesen ~~[illegible]~~ Ansatz auf die Bewegung eines freien Massenpunktes unter anderen, der uns zugänglichen Einflüssen also Kräften unterworfen ist, so ~~ist zu erwarten erwarten~~ liegt es nahe, das wesentliche dieser Einflüsse ~~durch die Bildungen~~ so zu messen, dass ~~diese~~ die Wirkung der unbekannten ~~System~~ Einflüsse wegfällt, also im klassischen Fall durch zweite Differentialquotienten ~~nach der Zeit~~ der Coordinaten nach der Zeit ~~und der~~, was mit der Annahme des Galileischen Trägheitsgesetzes gleichbedeutend ist.

ausführen

lineare Functionen der einzigen derjenigen Veränderlichen, die wir nicht ausschalten können, der Zeit ansetzen

Der grosse Erfolg ~~dieser Methoden~~ der Methoden ~~des Unendlich~~ der Differential und Integralrechnung hat es mit sich gebracht, dass in den seit Jahrhunderten wechselnden Neigungen zwischen continuierlicher Auffassung und Zerspaltung in ~~elementare~~ kleinste, aber endliche ~~Theile~~ Elemente die erstere lange Zeit die Oberhand behielt und auch jetzt, ~~die~~ ~~wo~~ in der Quantentheorie wieder die andere Seite mehr zur Geltung kommt und grosse Erfolge zeitigt, diese doch mit den ~~so~~ von der ~~erstern~~ continuierlichen Auffassung der Erscheinungen ausgebildeten Methoden arbeitet.

Epikur: elementa / inane
im ausdrücklichen Gegensatz zu Anaxagoras: continuum.

3.) Über all dem hatte sich aber das aus dem klassischen Altertum überkommene ~~Abstraktion~~ ~~Trennung~~ ~~Trennung~~ Gerüst von Raum u. Zeit, in welches wir das gesetzmässige Geschehen einordnen, immer mehr befestigt, ~~obgleich~~ und mehr und mehr in unserer Vorstellung den Charakter von etwas unabänderlich ~~geg~~ gegebenen, unabhängig von der Art seiner Erfüllung und des Geschehens darin, angenommen.

Es hat zwar zu keiner Zeit an Widerspruch dagegen von philosophischer Seite gefehlt, auch nicht an Versuchen dieses Gerüst in der Wirklichkeit ~~zu~~ wenigstens hypothetisch zu fundieren, aber eine bewusste und völlige Befreiung ~~ist~~ von dieser Auffassung ist erst durch die Relativitätstheorie ~~geg~~ Einsteins gegeben worden. Sie bringt klar zum Ausdruck, dass ~~unser~~ unsere Masse von Raum u. Zeit selbst mit dem Geschehen verknüpft sind, so wie ~~es~~ es etwa in anderen Gebieten der Physik längst geläufig war, das Messinstrument etwa das Thermometer selbst als Theil des zu messenden Systems und davon als beeinflusst zu betrachten.

Das konnte aber erst geschehen, nachdem in abstrakter ~~und mathematischer~~ Gestalt das mathematische Rüstzeug bereit gestellt war,

durch Entwicklung der Gedanken [Genius or] Riemanns. **6.**

~~Weyl hat d~~

~~Aber~~ All dies hat ~~schliesslich~~ [endlich] dazu geführt, als wesentlich und erkennbar den Zusammenhang der ~~geometrischen~~ [materiellen] Gebilde untereinander durch Vermittlung des unendlich Kleinen, ~~als wesentl~~ d. h. ~~also~~ [durch] die Art des stetigen Überganges von einer Stelle zur ~~Na~~ Nachbarstelle zu bestimmen.

Dabei ist jedoch immer noch ~~die Standpunkt Auffassung nicht verlas~~ dem Umstand nicht Rechnung getragen, dass
? wir eigentlich nur Nachrichten, Sinneseindrücke empfangen, die wir vielleicht aufeinander reducieren können, ~~denen denen aber~~ deren Beziehung zur Aussenwelt aber, wie diese selbst, zunächst hypothetischer Natur ist.

Lassen wir uns nun, um weiter zu kommen, ~~mit Aristoteles~~ von der Analogie [wie Aristoteles betont, ~~dass~~ diese wesentliche Tatsache.] der deutlichsten Wahrnehmungen, der Gesichtswahrnehmungen leiten, ~~indem~~ so bemerken wir, dass eigentlich nur Sehstrahlenrichtungen ~~betont~~ wahrgenommen werden, welche, wenn wir etwa ein Gebäude oder einen Berg betrachten, bei Ortsveränderung unsererseits sich gesetzmässig ~~und~~ stetig ändern, und aus dieser Änderung ziehen wir Schlüsse auf ~~das Vorhandensein und~~ die relative Lage und deren Änderung ~~zu unserem Standpu~~ zu uns. ~~Es liegt nun nahe, diese Auffassung auf alle an~~

[Allgemeine Probleme der Projectivität. Ballonphotographie. Photogrammetrie.]

Es sind also nur die letzten Wegelemente ~~d~~ der Lichtstrahlen ~~ihre Wahrnehmung~~, ~~Wahrn~~ ~~wel~~ welche Wahrnehmungen bei uns auslösen und die Beobachtung ihrer gegenseitigen Änderung findet ihre allerdings noch immer naive Erklärung in der Annahme einer ~~gegenseitigen Lageänderung zu~~ relativen Ortsveränderung von uns ~~zu~~ gegenüber ~~der Urheber der Ursa~~ den Ausgangspunkten der Lichtstrahlen. Wenn wir also in einem dreidimensionalen Gebiet, welches wir durch drei Coordinaten x_1, x_2, x_3 festlegen, eine solche Wahrnehmung machen, so ~~ist~~ [sind] uns dadurch ~~so verschiedene von~~ [verschiedene] ~~die~~ Verhältnisse ~~verschiedenen~~ ~~dx_1, dx_2, dx_3 ges~~ Differentiale dx_1, dx_2, dx_3; ~~gegeben~~ $d'x_1, d'x_2, d'x_3$ etc. gegeben, zwischen denen Beziehungen bestehen, welche selbst von x_1, x_2, x_3 abhängen.

Das führt aber weiter dazu, überhaupt unsere sinnliche Wahrnehmung aufzufassen als eine Wahrnehmung von Differentialverhältnissen in einem Gebiet von mindestens vier Veränderlichen, nämlich den althergebrachten ~~Coordinaten der~~ Ortsbestimmungen des Raumes und ~~einer~~ ~~[illegible]~~ der Zeit. In der Tat ist ~~[illegible]~~ in der klassischen Physik ~~die~~ das ~~Erfahrung~~ der Erfahrung entnommene immer durch Richtungen und ~~Energ~~ Geschwindigkeiten Energien ausgedrückt und ebenso in der relativistischen Physik der Energie-Impulsvektor als eine Differentialform ~~gedacht.~~ angenommen. ~~[illegible]~~

Die Beschränkung auf vier Veränderliche ist jedoch zunächst nur durch den Erfolg begründet und wir ~~[illegible]~~ stellen daher die weiteren Betrachtungen sogleich in einem Gebiet von n Veränderlichen an.

4.) Wir denken uns also einen Beobachter in einem Punkte des n dimensionalen Raumes der Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, welcher seine ~~A~~ Eindrücke empfängt längs ~~gewisser~~ der durch die Verhältnisse der $dx_1 \ldots dx_n$ bestimmten Richtungen, die man sich etwa als letzte Wegelemente von ~~Bahnen~~ Curven im $x_1 \ldots x_n$ Gebiet denken mag, längs deren die Eindrücke von ~~den~~ ~~[illegible]~~ den Ereignissen ~~des~~ in dem Gebiet der $x_1 \ldots x_n$ zu ihm gelangen. Da sein Standpunkt in diesem Gebiet selbst veränderlich zu denken ist, so wird er diese etwa durch ein Verfahren der linearen Interpolation in genügend kleinem Umfang auf einen Normalort beziehen können. ~~[illegible]~~ Für viele Zwecke wird er zunächst sogar davon absehen können. ~~Der Umfang aber, in welchem die~~ Das Gebiet der Variablen x_i aber, in welchem die lineare Interpolation angewendet wird, wird ~~lediglich~~ von dem Erfolg derselben abhängen ~~[illegible]~~ und ~~zwar~~ damit von der Genauigkeit seiner Beobachtungsmethoden. Mit fortschreitender Verfeinerung dieser wird der Umfang des Gebietes immer mehr eingeengt und wir kommen schließlich zu einem Grenzfall, den wir etwa als momentane ~~Wa~~ Beobachtungen bezeichnen können.

Um dies mathematisch auszudrücken können wir n Grössen $\xi^{(1)}_x, \xi^{(2)}_x \dots \xi^{(n)}_x$ einführen, welche den $dx_1 \dots dx_n$ proportional sind und deren Verhältnisse ~~eine~~ bestimmte Wahrnehmungen zu einander ~~gegen andere~~ in ~~dort~~ ähnlicher ~~derselben~~ Weise ~~festlegen wie~~ festzulegen gestatten, wie die Richtungen des euklidischen Raumes.
Aber diese ~~ξ~~ ξ^{α}_x $(\alpha = 1 \dots n)$ sind dann nichts anderes als lineare homogene Coordinaten ~~der~~ eines Raumes von n−1 Dimensionen. Da uns ferner die $x_1 \dots x_n$ unbekannt sind, bei ~~Veränderung der~~ Einführung anderer x_α ~~$x_1 \dots x_n$~~, etwa x'_α, die diesen entsprechenden ξ'^{α}_x mit den ursprünglichen ξ^{α}_x durch eine lineare homogene Substitutionen mit Coëfficienten, welche im Gebiet der einzelnen momentanen Wahrnehmung nur von den x_α oder den x'_α des augenblicklichen Beobachtungsortes abhängen, ~~so bleiben sind solche~~ also für die momentane Wahrnehmung selbst constant sind, so bleiben alle Beziehungen zwischen einem ξ'^{α}_x System und einem ξ_α System ungeändert erhalten, welche bei linearen Transformationen mit constanten Coeffizient ~~ino~~ erhalten bleiben, d.h. invariant sind. ~~Um~~
~~Wo~~ Diese beanspruchen daher besonderes Interesse und ihre Entwicklung ist nichts anderes als die projective Geometrie des linearen Raumes von n−1 Dimensionen.

Ich stelle mir dabei natürlich nicht vor, dass historisch genau dieser Weg eingeschlagen würde, aber ~~man~~ es scheint mir plausibel, dass die hier entwickelte Auffassung zusammen mit vielen anderen Erfahrungen, die bei der Bearbeitung der Sinneswahrnehmungen gemacht wurden, ~~darin~~ dabei vielleicht unbewusst eine Rolle gespielt hat, und man mag zugeben, dass sie ~~die ausgezeichnete Rolle~~ den merkwürdigen Umstand, dass wir gerade eine Dimension weniger als zur Erklärung der Erscheinungen zweckmässig ist und ~~ist~~ in dieser gerade die projective Auffassung als erste über die elementare Metrik hinausgehende entwickelt haben, verständlich macht. Nach dieser Auffassung wäre also der Raum der ~~subjectiven~~ momentanen Wahrnehmungen ein ~~ein~~ n dimensionalen Gebiet ~~ein~~ n−1 dimensionale linearer, projectiver Raumes ganz gleichgültig, ob im n dimensionalen Raum der Ereignisse ~~für eine~~

~~Geometrie~~ die Einordnung dieser geschieht.

Ich will diesen letzteren Raum in Zukunft der Kürze halber 9
als objectiven Raum bezeichnen im Gegensatz zum Raum ~~der ξ_α den ich als~~ des Beobachters der ξ_α, den ich als subjectiven Raum bezeichnen will.

5.) Für den einzelnen momentanen, subjectiven Raum entsteht sonach beim Wechsel der Variablen keine Schwierigkeit, wenn projective Geometrie herangezogen wird. Nun ändert sich aber dieser Raum im Laufe der Ereignisse, ~~und~~ d. h. ~~nicht an verschiedenen~~ mit Änderung der x_α, und hieraus entsteht eine Schwierigkeit, wenn zwei solche Räume zu einander in Beziehung gesetzt werden sollen, was aber unvermeidlich ist, wenn ein Beobachter seine Erfahrungen ~~an~~ zu verschiedenen Zeiten ~~oder an verschiedenen~~ miteinander vergleichen will. Wenn man nämlich für ein ~~Syst~~ Werthesystem der x_α, also an einer Stelle des objectiven Raumes die Verhältnisse der Differentiale also die ξ_α, betrachtet und sodann an einer anderen Stelle x'_α die ξ'_α, so hat es einen Sinn ~~als~~ die Verhältnisse der ξ_α u. der ξ'_α miteinander zu vergleichen, wenn die Variablen x_α dieselben geblieben sind. Nun sind aber diese Variablen an der einzelnen Stelle unbekannt ~~sind~~, nur die ξ_α der Beobachtung zugänglich und nur solche Beziehungen für den momentanen subjectiven Raum gegeben, welche unabhängig sind von der Wahl der Veränderlichen. Werden also an einer anderen Stelle die ξ'_α gebildet, so gilt von ihnen das gleiche und eine Vergleichung oder Beziehung der beiden Beobachtungen ist nur insofern möglich, als durch irgend ein anderes Mittel wenigstens die Verhältnisse ~~die Verh.~~ bestimmter ξ_α auf ~~andere~~ die ξ'_α bestimmter ξ'_α ~~bezogen werden~~, und auf diese dann die übrigen vergleichsweise bezogen werden, durch

projective Coordinaten.

Ohne ein solches Mittel der Beziehung würde die Annahme eines festen Systems von Variablen genau dieselben prinzipiellen Schwierigkeiten bieten, wie etwa die Annahme eines festen Bezugskörpers ähnlicher in der klassischen Theorien.

~~Es ist ein Es wird den~~ Es ist nicht ohne Interesse und dient auch vielleicht der Deutlichkeit, diesen Gedanken für die niedrigsten Dimensionszahlen $n=2$, $n=3$, $n=4$ genauer zu verfolgen.

Auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit der x, ~~bestimmt also die momentanen Beobachtungen durch die P~~ die wir uns unter dem Bilde einer gewöhnlichen Fläche denken können, sind die momentanen Beobachtungen also in der eindimensionalen durch $\xi^1 : \xi^2$ gegebenen, d. h. dem ~~Strahlenbüschel~~ Strahlbüschel in der Tangentialebene zugeordnet. ~~Die Fixierung einer dritten nun ist zunächst willkürlich, wird aber nach den Kreispunkten zweckmäßig~~ Soll nun überhaupt eine von der Wahl der x unabhängige, ~~Bez~~ also projectiv invariante Beziehung festgestellt werden, so müssen mindestens drei solche Strahlen ausgezeichnet werden. ~~Der vierte ist dann~~ Jeder vierte ist dann durch sein Doppelverhältnis zu den ersten drei bestimmt.

Wählt man eine fest etwa durch ein bestimmtes Ereignis oder eine Nachricht bestimmter Art ausgezeichnete fest, ~~die beiden andern aber~~ verlegt die beiden andern in die Kreispunkte der ~~Ebene~~ Tangentialebene, so hat man im Logarithmus des Doppelverhältnisses jeder vierten in Bezug auf diese 3 den Winkel, das übliche Maß. Natürlich ist das nur eine Einordnung des sich aus andern Gründen zweckmäßig erweisenden Winkelmaßes in die hier ~~gegebene~~ entwickelte Gedankenreihe und nicht eine Erklärung der Herkunft des Winkelmaßes.

In dieser Lage befindet man sich etwa ~~mit~~ auf einem Schiff ~~auf hoher~~ mit einem Kompass, womit man am Rande des Horizonts die gegenseitige Lage einzelner Leuchttürme feststellt. ~~Ändert sich nun~~ Bewegt sich nun das Schiff in einer sonst unbekannten Bahn, so ändern sich die Winkel zwischen den Leuchttürmen und unsere eindimensionale Welt ändert sich, sie hängt noch von einem Parameter ab, ~~da~~ als den wir etwa den Winkel der Richtung eines ~~Leu~~ Leuchtturmes mit der Magnetnadel ansehen können. Um überhaupt dazu zu kommen, müssen wir wenigstens eine absolute projective Invariante haben, also mindestens

oder Ereignisse, ~~oder~~ von denen allerdings einige durch Combination unvollständiger Beobachtungen oder gegenseitiger Lageänderungen ersetzt werden können.

Ebenso würden wir in einer dreidimensionalen objectiven Welt einen zweidimensionalen subjectiven ~~Welt vorfinden~~ Raum aufbauen, in welchem wir vier ausgezeichnete ~~Stellen~~ Verhältnisse der ξ_α^α auszuwählen hätten, in Bezug auf welche dann jedes weitere ~~Verhältniss~~- ξ_α^α System durch zwei projective Coordinaten festgelegt wäre. Die Änderung längs eines Weges im objectiven Raume würde wieder zur Einführung eines Parameters führen, für welchen eine der Coordinaten eines ~~Punktes genommen wer~~ Strahles genommen werden könnten. ~~Im vierd~~ ~~Im Raum von 4.~~ In einem objectiven Raum von 4 Dimensionen würden wir so zu einem subjectiven Raum von drei Dimensionen geführt und hätten ~~sechs Ereignisse festzuhalten~~ 5 ausgezeichnete ~~Strahlen etc.~~ Punkte des subjectiven Raumes, d.h. Verhältnisse der ξ_α festzuhalten, auf die wir jedes ~~sol~~ sechste beziehen, und die Veränderungen in der Beziehung dieser 6 Punkte oder Richtungen geben dann Anlass zur Einführung eines vierten Parameters.

~~Über diesen vierten Parameter wird zweckmässig so~~ Die Wahl dieses vierten Parameters ist zwar an sich ~~zweckmässig so gewählt, dass~~ gleichgültig, wird aber doch ~~Zweckmässig~~ ~~dt~~ nach Zweckmässigkeitsrücksichten den Beobachtungen anzupassen sein. Dabei bietet sich besonders eine Möglichkeit dar. Wenn nämlich ein besonders auffallendes System von ξ_α^α Werthen eine Veränderung zeigt, welche die Eigenschaften einer eingliedrigen ~~G~~ continuierlichen Gruppe im Sinne Lie's hat, so ist dies nach der Methode der linearen Interpolation u. ~~in der Grenzlage der~~ im Grenzfall der Differentiation feststellbar, ganz unabhängig von der speciellen Wahl der Coordinaten. Eine solche eingliedrige Gruppe kann dann auf die Normalform gebracht werden und in dieser ist der Parameter additiv, d.h. wenn eine Veränderung ~~von einer gegen eine~~ ~~bestimmte~~ von einer bestimmten Ausgangsstellung aus den Parameter t hat, von ~~dieser~~ jener aber zu einer dritten Stellung den Parameter t', so hat gegenüber der Ausgangsstellung die Endlage den Parameter t+t'.

I. 459-463.

Tempus item per se non est, sed rebus ab ipsis
consequitur sensus, transactum quid sit
in aevo.
Tum quae res instet; quid porro deinde
sequatur
nec per se quemquam tempus sentire
fatendum est
Semotum ab rerum motu placidaque
quiete.

Lucretius de rerum natura
I. 459-463.

K. k. Prüfung

für

theoretische Staatsprüfun

an der k. k. Uni

Form. Nr. 138.

Der grosse Vorteil für die Beobachtung u. Verwertung eines solchen Parameters ist deutlich genug, weil ~~die~~ jede Stellung als Ausgangsstellung aufgefasst werden kann und die Parameterwerte auf sie leicht bezogen werden können.

Eine solche Erscheinung ist uns in weitgehender Annäherung durch die ~~Beweg~~ tägliche Bewegung des ~~Tiefsten~~ Fixsternhimmels gegeben und wir haben in der Tat unseren zweiten Parameter, die Zeit, auf dieser Erscheinung ~~entnommen~~ aufgebaut.

6.) Die bisherigen ~~Entwickl~~ Darlegungen sind frei von jeder Bezugnahme auf eine bestimmte Metrik und sind ein Versuch auf Grund ~~consequenter~~ infinitesimaler Auffassung davon Rechenschaft zu geben, warum tatsächlich die projective Geometrie unabhängig ~~im Raum entwickelt~~ im Anschluss an die Erfahrung entwickelt wurde und neben den drei Dimensionen des Raumes der Erfahrung nach ein in eigenartiger ~~Sonderstellung~~ eingeführt ~~wurde~~ zweiter Parameter, die Zeit, (die danach ~~nur~~ aus Veränderungen im ~~des~~ Raume erkannt werden kann ~~in eigenartiger Sonderstellung eingeführt wurde~~. Dieser letztere Auffassung war schon ~~der~~ ~~Sc~~ ~~Schule Epikurs~~ Epikur geläufig und bei Lucretius, de rerum natura I 458–462. lesen wir:

tempus per se non est
So auch bestehet die Zeit für sich nicht; erst aus den Dingen selber ergibt der Begriff sich von dem, was früher geschehen
(Binder) was jetzt eben geschieht und was in der Folge geschehen wird.
Noch hat keiner die Zeit als was für sich selber empfunden,
semotum a rerum motu placidaque quiete.
von der Bewegung der Dinge ~~und fried~~ getrennt u. friedlicher Ruhe.

15/~~VI~~VII

Es ist dabei auch über die Art der Nachrichten aus dem objectiven Raum nichts vorausgesetzt, als dass sie längs letzter Wegelemente eintreten ~~und~~ eine gewisse Gleichartigkeit, welche uns gestattet, die ~~zwei aufeinanderfolgende Zeichen~~ Ex Verhältnisse verschiedener der Reihenfolge nach gegebenen Erinnerungsbilder — u. dies ist ein unentbehrliches subjectives Moment — aufeinander so zu beziehen, dass wir wenigstens einen stetigen Übergang zwischen ihnen herstellen können.

Man wird zugeben, dass damit unsere historisch ~~entw~~ und psychologisch entwickelte Auffassung von Raum u. Zeit viel näher angeschlossen wird ~~an~~ diejenige der Relativitätstheorie, welche als „Welt" ein Gebiet von vier Veränderlichen zu Grunde legt.

Allerdings entsteht aber damit eine neue Frage. Nämlich, wenn wir etwa die relativistische Auffassung der vierdimensionalen „Welt" zu Grunde legen, so können wir uns ~~die Zuordnung~~ ~~Wahrnehmungen der Beobachters~~ den Beobachter darin längs einer Linie bewegt denken, und sein Bündel ~~der~~ ξ_α ändert sich dann in seiner Beziehung zu den äusseren Ereignissen, ~~wo~~ aus denen er etwa geleitet vom Gruppenbegriff eine solche Auswahl trifft, die ~~ihm~~ einen passenden Parameter zu bilden gestattet. Aber über das Verhalten seines Bündels ~~bei~~ ~~geg~~ bei etwaiger Verschiebung ausserhalb der von ihm durchlaufenen Linie kann er gar keine weiteren Erfahrungen oder Beobachtungen machen. Dagegen ist es möglich, dass zwei Beobachter an einer ~~gemeinsamen~~ Stelle ihre ξ_α Systeme vergleichen und dann einander nochmal begegnen und wieder eine Vergleichung ~~vornehmen~~ und sich gegenseitig über den Verlauf der Abhängigkeit der ξ_α von dem Parameter berichten oder was auf dasselbe hinauskommt, man wird das Verhalten der ξ_α ~~auf einem geschlossenen Weg zu er~~ bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges auf der Mannigfaltigkeit der x_α zu erforschen trachten. Dabei wird es aber vielleicht nicht immer möglich sein, ~~dann~~ das einzelne ξ_α zu verfolgen, sondern nur ein ganzes Gebilde des ~~n-1~~ R_{n-1} der ξ_α, etwa im R_3 einen ~~Kegel~~ oder mehrere Kegel des zugehörigen Bündels, und es wird eine sehr allgemeine Annahme sein, wenn wir ins Auge fassen, dass eine ~~M_{n-2} des R_{n-1} im~~ ~~wieder in einem Punkte x wieder in eine~~ stetige lineare Mannigfaltigkeit ~~im~~ M_{n-2} mit ihren Beziehungsmannigfaltigkeiten (im Punkte x_α) ~~wieder~~ in eine solche übergeht im Punkte x'_α, ~~ohne~~ ~~dass jede~~ wobei die ~~Zuordnung in~~ neue Mannigfaltigkeit M'_{n-2} von dem ~~der~~ von x nach x' durchlaufenen Weg abhängt, aber nicht schon immer das einzelne ξ_α durch ein entsprechendes ξ'_α bestimmt sei, sondern dass erst ein ξ_α zusammen mit einer dieses ξ_α enthaltenden linearen Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen ein ebensolches ξ'_α mit der zugehörigen linearen Mannigfaltigkeit

bestimme und ausserdem eine M_{n-2} der ξ_α mit ihren Berührungs E_{n-1} wieder in eine solche im Punkte x' übergeht.

Dieses drücken wir mathematisch so aus, dass das Bündel der ξ_α Punkt x_α mit dem Bündel der ξ'^{α} im Punkte x'_α durch eine Berührungstransformation verbunden sei, welche jedoch noch von dem Weg abhängen kann, auf welchem x_α in x'_α übergeführt wurde. Wollen wir aber die Abhängigkeit von dem Weg ausdrücken, und halten zugleich daran fest, dass wir immer nur Beziehungen zwischen infinitesimal benachbarten Stellen ins Auge fassen, so müssen wir beim Übergang von einem Punkte zum unendlich benachbarten eine infinitesimale Berührungstransformation des ξ_α Raumes annehmen, welche dann vom Punkte x_α, der Richtung der Verschiebung, dx_α, dem betreffenden ξ_α und den Bestimmungsstücken der durch ξ_α gehenden linearen M_{n-1}, welche im Raume der homogenen ξ_α aber auch als eine M_{n-2} erscheint abhängt.

Um dies in Formeln zu fassen, führen wir neben den x_α ein System von Grössen ξ_α ein, welche sich bei Transformation der x_α transformieren sollen wie die Differentiale dx_α und ein System von Grössen v_α, welche sich dabei transformieren sollen wie die partiellen Differentialquotienten einer Function $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$, also in Formeln

$$x'_\alpha = \varphi_\alpha(x_\beta)$$

$$\text{I.)} \qquad \xi'^{\alpha} = \xi^{\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} \quad , \quad v'_\alpha = v_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha}$$

Dabei sollen die $\varphi_\alpha(x_\beta)$ irgendwelche reguläre Functionen mit nichtverschwindender Functionaldeterminante bedeuten. Es ist dann identisch

$$\xi^{\alpha} v_\alpha = \xi'^{\alpha} v'_\alpha$$

Die Gesamtheit aller dieser Transformationen, also aller regulären Punkttransformationen des x_α Raumes bildet ersichtlich eine Gruppe, welche wir der Kürze halber mit P bezeichnen wollen.

Bedeutet dann η_α ein Grössensystem, welches sich ebenso transformiert, wie die ξ_α

so wird jetzt bei einer Verschiebung [die x_α] in der Richtung ξ^α
aus den ~~η_α ein anderes System~~ η^α, v_α ein anderes System, $\eta^\alpha + \delta_\xi \eta^\alpha$,
wo das Zeichen $\delta_\xi \eta_\alpha$ die Änderung des η_α bei einer Verschiebung in der
Richtung des ξ^α anzeigt. ~~Wir haben dann anzusetzen~~

Bei ~~Einführung~~ Transformation der x_α erhalten wir dann die Transformations-
formeln

$$\delta_{\xi'} \eta'^\alpha = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} \delta_\xi \eta^\beta + \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \xi^\gamma \eta^\beta$$

II.

$$\delta_{\xi'} v'_\alpha = \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} \delta_\xi v_\beta + \frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\alpha \partial x'_\gamma} \xi'^\gamma v_\beta$$

Diese Formeln zeigen bereits, dass die einzelnen $\delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\beta$ ~~nicht~~ ~~, wenn invariant sind bei Transformation der Veränderlichen, wenn diese nicht linear ist, erst~~ nur bei linearer Transformation der x_α invariant sind, aber nicht mehr bei höheren Transformationen, dass dagegen die Differenzen zweier $\delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\alpha$ sich transformieren wie die ξ^α, v_β selbst. Hierin liegt bereits, dass wir in der Wahrnehmung nicht die Änderung eines Erscheinungs-Komplexes für sich, sondern nur in Bezug auf einen zweiten constatieren können ~~und zwar bereits~~ bei so allgemeinen Annahmen, wie sie hier zu Grunde liegen.
Dabei aber wird man ebensogut einen idellen, nur gewissen gedachten Forderungen genügenden ~~Erschein~~ Komplex, also einen im wahren Sinn des Wortes abstracten, ~~Komplex~~ nur gedachten Erscheinungen entsprechenden als Vergleichs-Komplex wählen können, als auch einen in der Wahrnehmung irgendwie ausgezeichneten. ~~ausgezeichneten~~ begründeten, ~~an ferne~~
Dem ersteren Weg entspricht die Beziehung auf eine von allen Erscheinungen losgelöste Raum-Zeit Vorstellung oder auch für gewisse Klassen von Erscheinungen die Annahme ~~gewisser~~ einer mit entsprechenden Eigenschaften ausgestatteten ~~Aether~~ idellen Substanz, den man etwa Aether nennen mag. Dabei ist es aber dann nicht weiter verwunderlich, dass man beim Studium verschiedener ~~Ers~~ Klassen von Erscheinungen an das Bezugsystem verschiedene Anforderungen ~~erstellt~~ stellt, welche nun vielleicht untereinander ~~nicht mit~~ oder mit den realen Analogieen, nach denen die ideelle Substanz gebildet wurde nicht verträglich sind.

Die Transformationsformeln II geben aber noch zu einer andern Bemerkung Anlass. Man kann fragen, ob ~~sie in~~ die δ_ξ in einem passenden Koordinatensystem auf Null transformiert werden können. ~~Dann zeigen die Formeln, dass dies nur möglich ist, wenn die $\delta_\xi \eta^\alpha$ bilineare symmetrische Formen der ξ^γ, η^β sind, also etwa~~

~~$$\delta_\xi \eta^\alpha = \frac{\partial^2 x'}{\partial \dots}$$~~

III. ~~$$\delta_\xi \eta^\alpha = a^\alpha_{\beta\gamma} \xi^\gamma \eta^\beta$$~~

~~und ausserdem das System~~

~~$$\frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = a^\alpha_{\beta\gamma}$$~~

~~integrierbar ist. Dazu ist aber ausser der Symmetrie der $a^\alpha_{\beta\gamma}$ in Bezug auf $\beta\gamma$ noch notwendig und hinreichend, dass sämtliche Ausdrücke~~

Es muss dann sein möglich sein, neue Variable x'_α so zu bestimmen, dass

$$\delta_\xi \eta^\alpha = - \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} \xi^\delta \eta^\gamma \qquad \left(a^\alpha_{\delta\gamma}\right)$$

$$\delta_\xi v'_\alpha = - \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial^2 x_\gamma}{\partial x'_\beta \partial x'_\delta} \xi'^\delta v_\gamma = - \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial^2 x_\gamma}{\partial x'_\beta \partial x'_\delta} \frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\varepsilon} \xi^\varepsilon v_\gamma$$

$$= + \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\beta} \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\varepsilon} \xi^\varepsilon v_\gamma$$

Also ist $\delta_\xi \eta^\alpha$ symmetrisch bilinear in den $\xi^\delta \eta^\gamma$ und wegen

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} \cdot \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\delta}\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\gamma}\right) = \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\beta \partial x'_\lambda} \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\delta} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} = 0$$

ist dann

$$\delta_\xi v_\alpha = + \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\beta} \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\varepsilon} \xi^\varepsilon v_\gamma \qquad \left(a^\gamma_{\alpha\varepsilon}\right)$$

Somit können wir setzen $\delta_\xi \eta^\alpha = a^\alpha_{\beta\gamma} \xi^\beta \eta^\gamma$ und haben dann

$$\delta_\xi v_\alpha = - a^\gamma_{\beta\alpha} \xi^\beta v_\gamma.$$

Aus

$$a^\alpha_{\beta\gamma} = - \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} \cdot \left| \frac{\partial x_{[illegible]}}{\partial x_{[illegible]}} \quad \frac{\partial x'_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right|$$

folgt dann für die Bestimmung der x'_α das System von Differentialgleichung

~~$$\frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = - a^\varepsilon_{\beta\gamma} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\varepsilon}.$$~~

$$a^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x'_\varepsilon}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial^2 x'_\varepsilon}{\partial x_\gamma \partial x_\delta}$$

Die Bedingungen für die Integrierbarkeit des Systems lauten dann

3.) $$K^{\varepsilon}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial a^{\varepsilon}_{\beta\delta}}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial a^{\varepsilon}_{\beta\gamma}}{\partial x_\delta} + a^{\mu}_{\beta\gamma} a^{\varepsilon}_{\mu\delta} - a^{\mu}_{\beta\delta} a^{\varepsilon}_{\mu\gamma} = 0.$$

Das sind ~~wohlbekannte~~ die wohlbekannten Formeln für den Krümmungstensor, ~~der also verschwinden muss~~ in der üblichen Theorie, der also verschwinden muss. Es ist sehr bemerkenswert, dass sich diese Bedingungen lediglich ~~aus~~ aus dem Verhalten gegenüber der Transformationsgruppe ergiebt, ~~ist~~ ohne ~~jede~~ eine besondere Beschränkung für die $\delta_\xi \eta$ selbst.

Die Einführung der $\delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\alpha$ kann auch rein formal durch Erweiterung der Gruppe aller ~~singulären~~ nicht singulären Punkttransformationen, deren Funktionaldeterminante also nicht verschwindet ~~geschehen~~, wenn man festsetzt, dass die $\xi \cdot \delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\alpha$ ~~dabei~~ transformiert werden ~~sollen~~, wie die $\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial t \partial \tau}$ und die $\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)$, wenn x_α als Funktionen der beiden Parameter t u. τ aufgefasst werden.

Um nun noch einmal auf ~~die Formel das~~ die Formel 3.) zurückzukommen, so ist klar, dass aus einer der dann vorhandenen Koordinatensysteme x'_α, welche also $\delta_\xi \eta^\alpha$ auf Null transformieren, jedes andere durch lineare Transformation, also Affinität hervorgeht, so dass damit ~~ein~~ ausgezeichnete Systeme von Koordinaten gegeben sind, ~~auf welche bezogen~~ Aber da nur die Differenz zweier $\delta_\xi \eta^\alpha$ Systeme invariant ist, so hat ~~der~~ ein Beobachter kein Mittel ein solches System durch irgend eine Erfahrung aufzustellen oder auch nur die Annahme eines solchen zu kontrollieren, so lange er seine Weltlinie nicht verlässt. ~~Spät~~ Im Laufe der Entwicklung ~~werden jedoch solche~~ wird sich jedoch ein ~~Weg eröffnen~~ anderer Weg zeigen, welcher in gewissem Sinne ~~ein allgemeiner~~ die Beantwortung sogar einer allgemeineren Frage in den Bereich der möglichen Erfahrung rückt.

II.

~~Wir gehen nun da~~ ~~Einführung der Berührungstransformation~~

Die Berührungstransformation –

II. Die Berührungstransformationen im Gebiete der ξ^α_α, v_α.

Wir ~~bringen~~ untersuchen nun den Ansatz, ~~welcher~~ dass bei infinitesimaler Verschiebung auf der Mannigfaltigkeit der x_α das Bündel O der ξ^α, v_α eine ~~Ber~~ Berührungstransformation erleiden soll einer näheren Untersuchung. Es bildet dann ~~die~~ ein ξ^α zusammen mit ~~einem~~ einem v_α, für welches $\xi^\alpha v_\alpha = 0$ ist, also ein Strahl mit ~~dem zugeh~~ einem hindurchgehenden linearen Raum von $n-2$ Dimensionen ein Element des Bündels u. diese Elemente zusammen eine Mannigfaltigkeit ~~von~~ M_{2n-3}. ~~Dann muss also sein~~

~~4.) $\delta_\xi(\eta^\alpha dv_\alpha) = \delta_\xi \eta\, dv_\alpha + \eta^\alpha \delta_\xi dv_\alpha = \rho\, \eta^\alpha dv_\alpha + \sigma\, d\eta^\alpha v_\alpha$~~

~~aber auch $\eta^\alpha dv_\alpha + d\eta^\alpha v_\alpha = 0$~~

Bezeichnen wir nun ~~eine Verschiebung~~ eine infinitesimale Änderung (der ξ^α, v_α) im Bündel O mit dem Zeichen $d\xi^\alpha, dv_\alpha$ und die Änderung, welche durch Verschiebung der x_α entsteht mit δ_ξ, so sind die Zeichen d u. δ vertauschbar, da sie Differentiation nach verschiedenen von einander unabhängigen Variablen bedeuten, die einen im ξ^α, v_α Bündel, die andern im x_α Gebiet. Es ist darum für eine Berührungstransformation (Bezeichnung η^α)

$$4.)\quad \delta_\xi(\eta^\alpha dv_\alpha) = \delta_\xi \eta^\alpha dv_\alpha + \eta^\alpha \delta_\xi dv_\alpha = \rho\, \eta^\alpha dv_\alpha + \sigma\, d\eta^\alpha v_\alpha,$$

aber auch
$$4a.)\quad \eta^\alpha dv_\alpha + d\eta^\alpha v_\alpha = 0$$

und
$$4b.)\quad \delta_\xi \eta^\alpha \cdot v_\alpha + \eta^\alpha \delta_\xi v_\alpha = 0.$$

daher auch
$$4c.)\quad \delta_\xi v_\alpha\, d\eta^\alpha + v_\alpha \delta_\xi d\eta^\alpha = -\rho\, \eta^\alpha dv_\alpha - \sigma\, d\eta^\alpha v_\alpha$$

Dabei sind die ρ, σ ~~homogen~~ von der ~~Ordnung~~ Dimension Null in den Variablen η, v, jedoch linear in den ξ^α, die $\delta_\xi \eta^\alpha$, $\delta_\xi v_\alpha$ jedoch sind linear in den ξ_α, von der Dimension 1 in den Variablen auf welche sie sich beziehen, von der Dimension Null in der andern Variablenreihe. Setzen wir nun analog wie bei Lie.

$$5.)\quad \eta^\alpha \delta_\xi v_\alpha = W(x, \eta, v, \xi)$$

so ist W linear (homogen) in den ξ, von der Dimension 1, aber im allgemeinen nichtlinear in η, v. Durch Differentiation finden wir weiter

$$6.)\quad \frac{\partial W}{\partial \eta^\beta} = \delta_\xi v_\beta + \eta^\alpha \frac{\partial \delta_\xi v_\alpha}{\partial \eta^\beta}$$
$$\frac{\partial W}{\partial v_\beta} = \eta^\alpha \frac{\partial \delta_\xi v_\alpha}{\partial v_\beta}$$

Ferner ist

7.) $$\delta_\xi d\eta^\alpha = \frac{\partial \delta_\xi \eta^\alpha}{\partial \eta^\beta} d\eta^\beta + \frac{\partial \delta_\xi \eta^\alpha}{\partial v_\beta} dv_\beta$$

$$\delta_\xi dv_\alpha = \frac{\partial \delta_\xi v_\alpha}{\partial \eta^\beta} d\eta^\beta + \frac{\partial \delta_\xi v_\alpha}{\partial v_\beta} dv_\beta$$

und damit findet durch Einsetzen in 4 und vergleichen der Coefficienten von $d\eta^\alpha$ und dv_α

8.) $$\delta_\xi \eta^\alpha = -\frac{\partial W(x\eta\xi v)}{\partial v_\alpha} + \rho \eta^\alpha$$

$$\delta_\xi v_\alpha = \frac{\partial W(x,\eta,\xi,v)}{\partial \eta^\alpha} - \sigma v_\alpha$$

Durch Einsetzen in 4 überzeugt man sich durch Anwendung des Eulerschen Satzes, dass für W, ρ, σ keine anderen Bedingungen sich ergeben. Man kann noch statt W setzen $W + \mu \eta^\alpha v_\alpha$. Dabei geht in 8 ρ über in $\rho - \mu$ und σ in $-\mu+\sigma$. Setzt man also $\mu = \frac{\rho+\sigma}{2}$, ~~und so wird gesetzt~~ und schreibt ρ für $\frac{\rho-\sigma}{2}$, so kommt

9.) $$\delta_\xi \eta^\alpha = -\frac{\partial W}{\partial v_\alpha} + \rho \eta^\alpha$$

$$\delta_\xi v_\alpha = \frac{\partial W}{\partial \eta^\alpha} + \rho v_\alpha$$

Die Function W ist selbst ~~keineswegs~~ aber keineswegs invariant, vielmehr gilt beim Übergang zu neuen Variablen

10.) $$W'(x',\eta',v',\xi') = W(x,\eta,v,\xi) - \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} v'_\alpha \xi^\gamma \eta^\beta.$$

während für ρ gilt $\rho'(x'\eta'v'\xi') = \rho(x\eta v\xi)$

Dagegen ist die Differenz zweier Wfunctionen wieder invariant.

Neben die Function W tritt aber noch die Function ρ, welche zwar linear in ξ, jedoch von der Dimension 0 in den η, v ist.

~~Betrachten wir nun eine homogene Function einer oder mehrerer Variablen reihen wie η, v_α, der Einfachheit halber ... solche Reihe~~

Betrachten wir nun eine Function $T(x,\eta,v)$ welche homogen in den η von der Dimension μ und in den v von der Dimension m sei. Wir haben dann

11.) $$\delta_\xi T = \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\xi^\alpha - \frac{\partial T}{\partial \eta^\alpha}\frac{\partial W}{\partial v_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial v_\beta}\frac{\partial W}{\partial \eta^\beta} + \rho(m+\mu)T.$$

Ist nun $\delta_\xi T = 0$, so ist T invariant gegenüber der Verschiebung im x_α Raume. und man sieht, dass man bei gegebenem W immer noch ρ so bestimmen kann, dass eine vorgegebene Function T invariant wird, ausgenommen es ist $m+\mu=0$. Ferner wird dann ρ im allgemeinen unbestimmt oder sinnlos für die Elemente für welche $T(x, \eta, v)=0$ ist.

~~Durch Bildung von $\delta_\xi \frac{\eta^\alpha}{\eta^\beta}$, erkennt man aus $\delta_\xi \frac{\eta^\alpha}{\eta^\beta}$~~

Ist $m+\mu$ aber gleich Null, so hängt $\delta_\xi T$ überhaupt nicht von ρ ab. Das trifft speciell für die ~~Invarianten~~ Verhältnisse der η^α u. der v_α zu und es hat daher die ~~Wahl~~ Bestimmung von ρ keinen Einfluss auf die ~~Gestalt~~ Veränderung der Gestalt einer Figur des ~~Kegels~~ im Bündels, ~~sondern nur~~ diese hängt vielmehr allein von W ab. Dagegen hat ρ Einfluss auf die Grösse der $\delta_\xi \eta^\alpha$ in Bezug auf die Verschiebung ξ^α.

~~III. Excurs über totale Differentialgleichungen~~

~~Die Wahl einer Function ρ bei gegebenem W kann dann noch immer so getroffen werden~~

Andererseits kann man 11. dazu benützen um diejenige Functionen W und ρ zu bestimmen, welche eine vorgegebene ~~Func~~ Form der η, v invariant lassen.

Bei gegebenem ~~ξ~~ W u ρ jedoch ~~ist es keineswegs mit~~ existieren im allgemeinen keineswegs immer Functionen T, ~~welche~~ für welche $\delta_\xi T=0$ ist, sondern das hieraus entspringende System von partiellen Differentialgleichungen hat nur dann Integrale, wenn zwischen W und ρ Bedingungsgleichungen bestehen.

Wird W symmetrisch in η^α, ξ ~~angenommen~~ und ρ unabhängig von η, v, ~~so~~ dagegen für T eine quadratische Form in ~~den~~ η^α, unabhängig von v angenommen, ~~so erhält man~~ entsprechend dem üblichen Ansatz für ~~ds~~ ein ds^2, so erhält man für ~~die δ_ξ~~ W und ~~die $\delta_\xi \eta$ die üblichen Formeln der covarianten Differentiation.~~ die $\delta_\xi \eta$ den Ansatz von H. Weyl, ~~welcher für~~ welcher für $\rho=0$ in den gewöhnlichen Ansatz der covarianten Differentiation übergeht.

Es wurde oben festgestellt, dass nur die Differenz zweier verschiedener $\delta_\xi \eta^\alpha$ insofern sie zum nämlichen ξ, η^α, aber zu verschiedenen Functionen W gehören und daher auch ~~zweier~~ nur die Differenz zweier Functionen W invariant ist. Sie fallen daher ebenso, wie das zugehörige φ gänzlich aus dem Bereiche der Wahrnehmungsmöglichkeit, wenn man unseren Gesichtspunkt ~~acceptiert~~ annimmt, ~~und~~ so lange wir den Beobachter nur längs einer Linie des x_α Raumes wandern lassen. Anders dagegen, wenn wir die Möglichkeit der Durchlaufung geschlossener Wege zulassen. Das ist immerhin in der Weise vorstellbar, dass zwei Beobachter an einer Stelle des x_α Raumes ihre Instrumente, Wahrnehmungen etc vergleichen, dann jeder einen ~~verschiedenen~~ anderen Weg zurücklegt, endlich ~~und~~ sie sich am Ende dieses Weges wieder treffen und ihre Wahrnehmungen vergleichen. Um das in Formeln genauer zu verfolgen schreiben wir

$$12.)\quad \delta_\xi \eta^\alpha = Z^\alpha_\beta(x,\eta,v)\,\xi^\beta \qquad \delta_\xi v_\alpha = V_{\alpha\beta}(x,\eta,v)\,\xi^\beta$$

und setzen $x_\alpha = x^0_\alpha + r\,\psi_\alpha(s)$

Hierin sollen die $\psi_\alpha(s)$ periodische Functionen der Variablen s mit der Periode 1 ~~sind~~ ~~sodann~~ und $\psi_\alpha(0)=\psi_\alpha(1)=0$, r eine reelle Variable, die auf einen genügend kleinen, die 0 enthaltendes Intervall beschränkt sei. Wenn dann s von 0 bis 1 geht, so durchläuft x_α einen von $\overset{0}{x}_\alpha$ ausgehenden und dahin zurückkehrenden geschlossenen Weg. Für die η^α, v_α haben wir dann das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$13.)\quad \frac{d\eta^\alpha}{ds} = r\,Z^\alpha_\beta(x,\eta,v)\,\psi'_\beta(s), \qquad \frac{dv_\alpha}{ds} = r\,V_{\alpha\beta}(x,\eta,v)\,\psi'_\beta(s)$$

Man kann jetzt die η^α, v_α nach Potenzen von r entwickeln und setzen

$$\eta^\alpha = \overset{0}{\eta}{}^\alpha + r\eta_1^\alpha + r^2\eta_2^\alpha + r^3\eta_3^\alpha + \dots$$
$$v_\alpha = \overset{0}{v}_\alpha + r v_{1\alpha} + r^2 v_{2\alpha} + r^3 v_{3\alpha} + \dots$$

Durch Coefficientenvergleichung kommt man zu den Formeln

$$15.)\quad \frac{d\eta_\mu^\alpha}{ds} = \frac{1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d^{\mu-1}Z^\alpha_\beta(x,\eta,v)}{dr^{\mu-1}}\right)_{r=0}\psi'_\beta(s) \qquad \frac{dv_{\mu\alpha}}{ds} = \frac{1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d^{\mu-1}V_{\alpha\beta}(x,\eta,v)}{dr^{\mu-1}}\right)_{r=0}\psi'_\beta(s).$$

Da ferner für $s=0$ auch die $\eta^\alpha_\lambda, v_{\lambda\alpha}$ sämtlich 0 sind, so lassen sich die Coefficienten Schritt für Schritt durch Quadratur berechnen.

Wir finden

16.) $\eta_1^{\alpha}(s) = Z_\beta^{\alpha}(\overset{0}{x}, \overset{0}{\eta}, \overset{0}{v})\psi_\beta(s)$, $v_{1\alpha}(s) = V_{\alpha\beta}(\overset{0}{x}, \overset{0}{\eta}, \overset{0}{v})\cdot\psi_\beta(s)$

und damit

17.)
$$\eta_2^{\alpha}(s) = \left(\frac{\partial Z_\beta^\alpha}{\partial x_\delta} + \frac{\partial Z_\beta^\alpha}{\partial \eta^\delta} Z_\delta^\gamma + \frac{\partial Z_\beta^\alpha}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\delta}\right)_0 \int_0^s \psi_\delta \psi_\beta' ds$$
$$v_{2\alpha}(s) = \left(\frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial x_\delta} + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial \eta^\delta} Z_\delta^\gamma + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\delta}\right)_0 \int_0^s \psi_\delta \psi_\beta' ds.$$

Setzen wir nun ~~$\varphi_{\delta\beta}$ = rw~~ $\omega^{\delta\beta} = -\omega^{\beta\delta} = r^2\int_0^1 \psi_\delta \psi_\beta' ds$, so wird auch

~~$\omega^{\delta\beta}$~~ $\omega^{\delta\beta} = \int x_\delta dx_\beta$ über die geschlossene Kurve und da ~~das erste~~ der Coefficient der ersten Potenz von r bei Integration über die Curve verschwindet, so bleibt schliesslich als Anfangsglied

18.
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z_\beta^\alpha}{\partial x_\delta} - \frac{\partial Z_\delta^\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial Z_\beta^\alpha}{\partial \eta^\delta} Z_\delta^\gamma - \frac{\partial Z_\delta^\alpha}{\partial \eta^\gamma} Z_\beta^\gamma + \frac{\partial Z_\beta^\alpha}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\delta} - \frac{\partial Z_\delta^\alpha}{\partial v_\beta} V_{\beta\delta}\right)_0 \omega^{\delta\beta}$$

und

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial x_\delta} - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial \eta^\delta} Z_\delta^\gamma - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial \eta^\delta} Z_\beta^\gamma + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\delta} - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\beta}\right)_0 \omega^{\delta\beta}$$

~~Die Aus~~ Diese Ausdrücke sind aber ~~nichts anderes als die~~ genau ~~dieselben~~, ~~welche~~ diejenigen, deren Verschwinden die vollständige Integrierbarkeit des Systems totaler Differentialgleichungen

$$d\eta^\alpha = Z_\beta^\alpha(x, \eta, v)dx_\beta, \quad dv_\alpha = V_{\alpha\beta}(x, \eta, v)dx_\beta$$

aussagt und in der Tat ist begrifflich klar, dass ~~bei~~ im Falle der vollständigen Integrierbarkeit ~~auch~~ bei ~~Durchlauf~~ Integration längs eines geschlossenen Weges wieder die Anfangswerte zum Vorschein kommen müssen und umgekehrt, wenn dies der Fall ist ~~so~~ vollständige Integrierbarkeit vorliegt.

Denkt man sich etwa die x_α als Functionen zweier Parameter τ_1, τ_2, welche ~~ist~~ etwa in einer Ebene als cartesische Coordinaten interpretiert werden mögen, ~~so~~ und die Durchlaufung einer geschlossenen Curve im x_α Raum dadurch bewirkt, dass (τ_1, τ_2) eine kleine geschlossene Curve durchläuft, so ist klar, dass ~~dass~~ der Quotient des Integrals $\omega^{\delta\beta}$ durch $\left(\frac{\partial x_\delta}{\partial \tau_1}\cdot\frac{\partial x_\beta}{\partial \tau_2} - \frac{\partial x_\beta}{\partial \tau_1}\ldots\right)$ das Integral $\int d\tau_1 d\tau_2$

~~In der Grenze~~ beim Zusammenziehen der Curve sich dieser Grenze $\left(\frac{\partial(x_\delta x_\beta)}{\partial(\tau_1 \tau_2)}\right)$ nähert, während in der obigen Entwicklung die Glieder höherer ~~Or~~ als der zweiten Ordnung in τ gegen Null gehen.

Da sich ferner die Funktionaldeterminanten transformieren wie $(\xi^\delta \zeta^\beta - \xi^\beta \zeta^\delta)$ so ~~kö~~ erkennen wir, dass bei Einführung ~~einer neuen~~ zweier neuer ~~transformierten~~ Φ^α, f_α die ~~Ausdrücke~~ Veränderlichen, ~~die sich transformieren~~ mit 18 gebildeten Ausdrücke

$$19.)\quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Z^\alpha_\beta}{\partial x_\delta} - \frac{\partial Z^\alpha_\delta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial Z^\alpha_\beta}{\partial \eta^\delta} Z^\gamma_\delta - \frac{\partial Z^\alpha_\delta}{\partial \eta^\delta} Z^\delta_\beta + \frac{\partial Z^\alpha_\beta}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\delta} - \frac{\partial Z^\alpha_\delta}{\partial v_\beta} V_{\beta\delta}\right) f_\alpha (\xi^\delta \zeta^\beta - \xi^\beta \zeta^\delta)$$

$$= M^\alpha_{\delta\beta} f_\alpha (\xi^\delta \zeta^\beta - \xi^\beta \zeta^\delta)$$

und

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial x_\delta} - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial \eta^\gamma} Z^\gamma_\delta - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial \eta^\gamma} Z^\gamma_\beta + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\delta} - \frac{\partial V_{\alpha\delta}}{\partial v_\gamma} V_{\gamma\beta}\right) \Phi^\alpha (\xi^\delta \zeta^\beta - \xi^\beta \zeta^\delta)$$

~~unter~~ gegenüber den Transformationen T invariant sind.

Sie sind die unmittelbaren Verallgemeinerungen des Riemann-Christoffel'schen Krümmungstensors.

Die entwickelten Formeln haben aber auch eine ~~allgemeine~~ Bedeutung für irgend ein System totaler Differentialgleichungen und geben zu interessanten geometrischen u. analytischen Fragestellungen Anlass, auf die ich in einem Exkurs zurückkommen werde.

Wenn wir nun noch berücksichtigen, dass im Falle einer Berührungstransformation kanonischer Bündel wir schreiben können

$$W(x, \eta, v, \xi) = W_\alpha(x\,\eta\,v)\,\xi^\alpha\,; \quad \rho(x\,\eta\,v\,\xi) = \rho_\alpha(x\,\eta\,v)\,\xi^\alpha$$

so erhalten wir

$$Z^\alpha_\beta = -\frac{\partial W_\beta}{\partial v_\alpha} + \rho_\beta \eta^\alpha, \quad V_{\alpha\beta} = \frac{\partial W_\beta}{\partial \eta^\alpha} + \rho_\beta v_\alpha.$$

Setzt man nun

$$20.)\quad \Omega_{\delta\beta} = \frac{\partial W_\beta}{\partial x_\delta} - \frac{\partial W_\delta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial W_\beta}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial W_\delta}{\partial \eta^\gamma} - \frac{\partial W_\beta}{\partial \eta^\gamma} \frac{\partial W_\delta}{\partial v_\gamma}$$

$$\rho_{\delta\beta} = \frac{\partial \rho_\beta}{\partial x_\delta} - \frac{\partial \rho_\delta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \rho_\beta}{\partial v_\gamma} \frac{\partial W_\delta}{\partial \eta^\gamma} - \frac{\partial \rho_\beta}{\partial \eta^\gamma} \frac{\partial W_\delta}{\partial v_\gamma} - \frac{\partial \rho_\delta}{\partial v_\gamma} \frac{\partial W_\beta}{\partial \eta^\gamma} + \frac{\partial \rho_\delta}{\partial v_\gamma} \frac{\partial W_\beta}{\partial \eta^\gamma}$$

so entsteht beim Durchlaufen eines ~~…~~ infinitesimalen Weges eine neue infinitesimale Transformation, aber jetzt im Bündel des Punktes x_α selbst. Ihre Charakteristischen Functionen sind

21.) $$\Omega = \omega^{\delta\beta}\Omega_{\delta\beta} \quad \text{und} \quad R = \varrho_{\delta\beta}\,\omega^{\delta\beta},$$

welche beide augenscheinlich unter P invariant sind.

Zwischen den Coefficienten $\Omega_{\delta\beta}$, ~~bestehen~~ $\varrho_{\delta\beta}$ bestehen ferner ~~Identit~~ Identitäten, welche den Beltramischen völlig analog sind.

Bezeichnet man nämlich ~~den Operator~~ mit dem Zeichen $(\;)_\alpha$ den Operator ~~$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial W_\alpha}{\partial y_\beta}\frac{\partial}{\partial \eta^\beta}$~~

22.) $$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \left(\frac{\partial W_\alpha}{\partial v_\beta} + \varrho_{\beta\alpha}\eta^\beta\right)\frac{\partial}{\partial \eta^\beta} + \left(\frac{\partial W_\alpha}{\partial \eta^\beta} + \varrho_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial}{\partial v_\beta}$$

so wird

$$(\Omega_{\delta\beta})_\alpha + (\Omega_{\beta\alpha})_\delta + (\Omega_{\alpha\delta})_\beta = 0$$

23.) $$(\varrho_{\delta\beta})_\alpha + (\varrho_{\beta\alpha})_\delta + (\varrho_{\alpha\delta})_\beta = \frac{\partial(\varrho_\beta\Omega_{\alpha\delta})}{\partial(v_\gamma\eta^\gamma)} + \frac{\partial(\varrho_\alpha\Omega_{\delta\beta})}{\partial(v_\gamma\eta^\gamma)} + \frac{\partial(\varrho_\delta\Omega_{\beta\alpha})}{\partial(v_\gamma\eta^\gamma)}$$

Durch den infinitesimalen, geschlossenen Umlauf wird also im Punkte x_α selbst eine Berührungstransformation induziert und zwar ergeben sich ~~solche~~ $\frac{n(n-1)}{2}$ ~~lineare~~ im allgemeinen linear unabhängige solche. Da sie ferner invariant gegenüber P sind, so kann man sie als der Beobachtung zugänglich ansehen. Es sind nun genau eben soviele, als eine ~~quer~~ ~~quo~~ ~~homogene lineare~~ quadratische Form unabhängige infinitesimale Transformationen in sich hat, allerdings mit dem Unterschied, dass die hier auftretenden induzierten Transformationen des Bündels ~~nicht eine Gruppe zu bilden~~ im allgemeinen keine Gruppe bilden. Die Bedingungen dafür sind allerdings vorläufig zu complicierter Natur, als dass sich ihre Aufstellung und Untersuchung ~~gestatten~~ früher ~~unternehmen~~ hätte in Angriff nehmen konnte.

Immerhin erscheint es aber sehr bemerkenswert, dass die tatsächliche kontravariante Entwicklung auf den einfachsten Fall, ~~einer~~ die Annahme eines invarianten ds^2, geführt hat, der genau so viele infinitesimale Transformationen enthält, wie der allgemeine. ~~Der nächst allgemeinere Ansatz Weyl's kann als aufgefasst werden als die Invarianz von $ds^2 = 0$ [illegible] verlangt~~

Diese Trf. Λ können jedoch keineswegs willkürlich angenommen werden, sondern sind durch die Identitäten 22.) 23.) $\frac{\partial \Lambda}{}$ geknüpft in denen die $\frac{n(n-1)}{2}$ Funktionen W_β und ρ_β auftreten $\frac{n(n-1)}{2}$ Λ aber nur $2n$ W_β, ρ_β.

IV

Bisher haben wir lediglich die Änderung im einzelnen Bündel verfolgt, ohne sie in Zusammenhang mit den Verschiebungen im x_α-Raum zu bringen. Nun wollen wir uns darauf eingehen. Denken wir uns ein ~~System~~ Element η^α, v_α an der Stelle x_α und nun sowohl die η, v als auch x als Funktionen eines Parameters t, so haben wir ~~für die Änderung~~ bei Änderung von t ~~die~~ für die Änderungen der η, v die Differentialgleichungen

$$24.)\quad \frac{d\eta^\alpha}{dt} = -\frac{\partial W_\beta}{\partial v_\alpha}\frac{dx_\beta}{dt} + \rho_\beta \frac{dx^\beta}{dt}\eta^\alpha$$

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{\partial W_\beta}{\partial \eta^\alpha}\frac{dx_\beta}{dt} + \rho_\beta \frac{dx^\beta}{dt} v_\alpha$$

~~Fällt nun die Richtung der η^α, v_α mit der den Richtung der~~ ~~Verschiebt~~ ~~Fragen wir nun nach denjenigen Elementen, welche~~

Fragen wir nun nach solchen eindimensionalen Elementreihen, welche aus einem gegebenen durch Verschiebung längs der eigenen Richtung im x_α Raum entstehen, so haben wir zu ~~set~~ die η_α proportional den $\frac{dx_\alpha}{dt}$ zu setzen, etwa ~~η_α~~ $\eta^\alpha = \sigma x'_\alpha$ und bekommen die Differentialgleichungen

$$25.)\quad \sigma' x'_\alpha + \sigma x''_\alpha = -\sigma \frac{\partial W_\beta(x, x', v)}{\partial v_\alpha} x'_\beta + \sigma \rho_\beta x'^\beta x'^\alpha$$

$$v'_\alpha = \frac{\partial W_\beta(x x' v)}{\partial x'_\alpha} x'_\beta + \rho_\beta x'^\beta v_\alpha$$

Durch Elimination ~~der für die Gestalt der Kurven gleichgültigen~~ von σ erhält man aus 25.) die Gleichungen

~~$x''_\alpha x'_\gamma - x'_\alpha x''_\gamma = \left(\frac{\partial W_\beta(x x' v)}{\partial v_\alpha} x'_\gamma + \frac{\partial W_\beta(x x' v)}{\partial v_\gamma}\right) x'_\beta x'$~~

~~$x''_\alpha x'_\gamma - x'_\alpha x''_\gamma = x'_\beta \left(\frac{\partial W_\beta}{\partial v_\alpha} x'_\gamma - \frac{\partial W_\beta}{} \right.$~~

$$26.)\quad x''_\alpha x'_\gamma - x'_\alpha x''_\gamma = x'_\beta\left(-\frac{\partial W_\beta(x x' v)}{\partial v_\alpha} x'_\gamma + \frac{\partial W_\beta(x x' v)}{\partial v_\gamma} x'_\alpha\right)$$

$$v'_\alpha v_\gamma - v'_\gamma v_\alpha = x'_\beta\left(\frac{\partial W_\beta}{\partial x'_\alpha} v_\gamma - \frac{\partial W_\beta}{\partial x'_\gamma} v_\alpha\right)$$

Anmerkung. Die Invarianz von M u. N ergibt sich auch aus den Formeln

$$M = (\delta_\xi \delta_\zeta \eta^\alpha - \delta_\zeta \delta_\xi \eta^\alpha) f_\alpha - Z^\alpha_\beta f_\alpha (\delta_\zeta \xi^\beta - \delta_\xi \zeta^\beta)$$

$$N = (\delta_\xi \delta_\zeta v_\alpha - \delta_\zeta \delta_\xi v_\alpha) \Phi^\alpha - V_{\alpha\beta} \Phi^\alpha (\delta_\zeta \xi^\beta - \delta_\xi \zeta^\beta)$$

und den Transformationsformeln

$$Z'^\alpha_\beta = Z^\mu_\lambda \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\beta} + \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\lambda \partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\beta} \eta^\lambda$$

$$(\delta_\zeta \delta_\xi \eta^\alpha - \delta_\xi \delta_\zeta \eta^\alpha)' = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} (\delta_\zeta \delta_\xi \eta^\beta - \delta_\xi \delta_\zeta \eta^\beta) + \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} (\delta_\zeta \xi^\gamma - \delta_\xi \zeta^\gamma) \eta^\beta$$

$$(\delta_\zeta \delta_\xi v_\alpha - \delta_\xi \delta_\zeta v_\alpha)' = \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} (\delta_\zeta \delta_\xi v_\beta - \delta_\xi \delta_\zeta v_\beta) + \frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\alpha \partial x'_\gamma} \cdot \frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\delta} v_\beta (\delta_\zeta \xi^\delta - \delta_\xi \zeta^\delta)$$

$$(\delta_\zeta \xi^\alpha - \delta_\xi \zeta^\alpha)' = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} (\delta_\zeta \xi^\beta - \delta_\xi \zeta^\beta)$$

$$(\delta_\xi \eta^\alpha)' = \delta_\xi \eta^\beta \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \xi^\gamma \eta^\beta \qquad \delta_\xi \eta^\alpha = Z^\alpha_\beta \xi^\beta$$

$$= Z'^\alpha_\beta \xi'^\beta \qquad \xi^\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\beta} \xi'^\beta$$

$$Z^\lambda_\mu \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\lambda} \xi^\mu + \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\gamma \partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\beta} \xi'^\beta \eta^\gamma$$

$$Z'^\alpha_\beta = Z^\lambda_\mu \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\lambda} \cdot \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\beta} + \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\gamma \partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\beta} \eta^\gamma$$

so dass also auch die $g_{1\beta}$ hinausfallen.

Man kann in 25.) auch den Proportionalitätsfactor dadurch normieren dass man einer der x_α als ~~willkürliche~~ bestimmte Function des t annimmt. Existiert eine Invariante gegenüber W, ~~so kann man diese gleich 1 setzen~~ welche in den y^α ~~von der Di~~ nicht von der Dimension Null ist, so kann man sie auf die Dimension 1 bringen und ~~setzen~~ zur Normierung von t setzen:

$$T(x, x', v) = 1$$

~~oder~~ woraus sich dann ergiebt:

~~$t = \int T(x, x', v)\,dt$~~

$$t = \int T\left(x \frac{dx}{d\tau}, v\right) d\tau$$

für einen beliebigen Parameter τ.

Diese Streifen, wie wir die ~~durch~~ 25 oder 26 erklärten Gebilde nennen wollen, treten nun an die Stelle der geodätischen Linien der an ein ds^2 anschliessenden Betrachtung.

Wählt man etwa x_1 als unabhängige Veränderliche, und setzt ~~so ergiebt sich ein System von n−1~~ eines der $v_\alpha = 1$, so ergiebt sich ein System von $2(n-1)$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den x, erster in den v, ~~welches im ganzen 3n−3 willkürliche Constante enthält, so dass ∞^{3n-3} Curven dieser Art auf der Mannigfaltigkeit existieren~~. dessen Lösungen daher $3n-3$ Constante enthalten, von denen aber eine durch die Bedingung $y^\alpha v_\alpha = 0$ festgelegt ist, so dass nur $3n-4$ Constante frei bleiben. Wird nun verlangt, dass die Curve durch 2 gegebene Punkte des x_α Raumes gehen soll, so ergiebt dass $2n-2$ Bedingungen, denen durch eine ~~Mannigfaltigkeit von ∞^{2n-2} Schaar von Curven genügt wird.~~ ∞^{n-2} Schaar von Curven genügt wird. Von den ∞^{2n-3} Streifen welche entsprechend den ∞^{2n-3} Elementen ~~in~~ von einem Punkte ausgehen, treffen daher in einem andern Punkte ∞^{n-2} ~~ein~~ wieder zusammen.

Dadurch wird also die ganze M_n der x_α auf eine ~~Man~~ ∞^n M_{n-2} im einzelnen Punkte abgebildet. ~~und es ist daher möglich denkbar die~~ Denken wir uns nun die Berührungstransformation also die Function W, als durch irgend ein Agens im Raume der x_α ~~verursacht~~ hervorgerufen.

Denken wir uns weiter, dass dann ~~Nachricht~~ die Nachrichten von einem Element ~~Punkt~~ zum andern längs solcher Elementstreifen fortlaufen, etwa durch polarisiertes Licht, so werden die von einem und demselben Punkt ausgehenden Nachrichten in einem andern

Punkt ~~zusammentreffen~~ auf einer M_{n-2} ~~zusammentreffen~~ eintreffen, also in einer vierdimensionalen Welt auf ~~einer Fläche~~ einer Fläche des dreidimensionalen subjectiven Raumes. Es ergiebt sich so die Möglichkeit in einer Abbildung von den Ereignissen im ~~n~~ ~~Dimens~~ n dimensionalen Raume Kenntniss zu erhalten.

Wenn nun auch ~~zunächst~~ die Vorstellung einer genaueren Durchführung für bestimmte physikalische Erscheinungen noch in weiter Ferne liegt, so ist doch prinzipiell bemerkenswert, dass bei ~~unserer~~ der hier entwickelten Auffassung es grundsätzlich möglich erscheint, aus Beobachtungen im subjectiven Raum auf Ereignisse in dem objectiven Raum der x_α ~~und~~, ihre gegenseitige Lage zu schliessen, und zwar bei consequentem Festhalten an der Auffassung, dass nur ~~infinitesimale Beziehungen~~ die letzten Wegelemente zur Beobachtung kommen. Ist die Transformation W hingegen nur eine erweiterte Punkttransformation, so ist ein solches Vorgehen nicht möglich, ~~weil~~ dann die ~~von~~ mit einer η^α Richtung vereinigt liegenden E_{n-1} Elemente auch immer während des ganzen Weges mit ihr vereinigt bleiben.

Überhaupt scheint mir darin, dass wir unsere subjectiven Wahrnehmungen ~~mit Erfolg~~ auf ~~zu~~ ~~Differentialverhältnisse~~ Geschwindigkeiten, Energie u. ähnliches zurückführen ~~und eben darin, dass sie~~ ~~Diff die Darstellung durch~~ und damit Erfolg haben, dass wir diese Grössen als Differentialverhältnisse von anderen endlichen Grössen auffassen ein starker Grund für die Berechtigung und Zweckmässigkeit der Vorstellung einer realen Aussenwelt zu liegen. Im Gegenfalle würde ~~ja kein Grund vorliegen~~ es ja keinen wesentlichen Vorteil bieten über die unmittelbar wahrgenommenen Grössen hinauszugehen. Ich denke mir das ähnlich, ~~wie schon im Anfang erwähnt,~~ ~~dass~~ wie wir ~~[illegible]~~ aus den Veränderungen der gegenseitigen Lage unserer Sehstrahlen auf die Existenz von Aussendingen schliessen,

Bis jetzt war noch von Metrik nicht die Rede und in der Tat bestimmen die Berührungstransformationen W zwar die Änderungen der gegenseitigen Lage der Elemente bei Verschiebung der x_α aber erst durch Fixierung der ~~Parameter~~ Function ξ kommen diese in bestimmte Beziehung zu den ~~ξ^α selbst~~ Verschiebungen der x_α selbst.

Es war schon früher bemerkt, dass man ~~da~~ bei gegebenem W durch geeignete Wahl von ξ erreichen kann, dass eine beliebig gegebene Function der x, y, v bei jeder Verschiebung ungeändert bleibt. Sei nun T(x, y, v) eine solche Invariante, in ξ von der Dimension 1, in v von der Dim. 0, so kann man sich das Integral

$$27.) \qquad \int_0^{0'} T(x, dx, v)$$

von einem Punkte O zu einem andern O' zunächst längs eines beliebigen Weges erstreckt denken, ~~wobei~~ x u. v als Functionen eines Parameters anzusehen sind. Erstreckt man es speziell längs einer der ∞^{n-2} ~~Curven~~ Streifen, welche bei der Berührungstransformation in sich verschoben werden und von O nach O' führen, so kann man unter diesen noch diejenigen aussuchen, für welche das Integral ~~das~~ gegenüber einer Änderung der n−2 Parameter stationär ist, d.h. das Differential in Bezug auf diese Parameter Null ist. Dadurch ist dann eine Art Maßbestimmung im x_α Raume festgelegt, welche mit der Berührungstransformation und der Invariante T verknüpft ist.

~~Man kann u~~ Es wäre nun interessant zu untersuchen, für welche Berührungstransformationen u. Invarianten diese ~~Maßbestimmung~~ längs bestimmter ~~Lin~~ Streifen gemessene „Länge" mit derjenigen übereinstimmt, welche aus dem ~~aus~~ 27.) ~~gehör~~ entspringenden Variationsproblem hervorgeht. Sie spielen jedenfalls eine ausgezeichnete Rolle ~~und fallen für ein ds^2~~ und enthalten als Spezialfall die geodätischen Linien ~~bei einem der geodätischen~~ ~~Lin~~ bei ~~einem ds^2~~ einer invarianten quadratischen Differentialform.

~~Dabei ist zu beachten, dass die wie schon früher bemerkt,~~

~~dass~~

Um nun die allgemeinen Erörterungen zusammenzufassen und abzuschliessen, so wird man sagen können, dass die hier entwickelte Auffassung zwar noch weit entfernt ist, von bestimmten der Messung unterworfenen physikalischen Erscheinungen Rechenschaft zu geben, aber dass sie dagegen gewisse allgemeine Züge der bisherigen Entwicklung gut wiedergiebt. ~~Dahin gehören die~~ Diese sind die ausgezeichnete Stellung der projectiven Geometrie im Raume von n-1 Dimensionen und die Sonderstellung eines der Zeit entsprechenden Parameters, ferner die Tatsache, dass alle über diese subjective Welt hinausführenden ~~Betrachtungen~~ Erscheinungen lediglich auf Grössen zweiter Ordnung, den ~~geschlossenen~~ Ergebnissen infinitesimaler geschlossener Umläufe beruhen, dass die dadurch im subjectiven Raum inducierte Geometrie auf eine endliche oder unendliche Gruppe führt, die aber jedenfalls von $\frac{n(n-1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen erzeugt ~~wird besitzt~~ und daher im ~~ersten Annäherung~~ einfachsten Fall durch die Invariante einer quadratischen Differentialform gekennzeichnet werden kann. Endlich dass sich die Möglichkeit eröffnet ~~aus~~ auf Grund der früher besprochenen Abbildung der Punkte des n dimensionalen objectiven Raumes auf eine n fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von n-2 fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des subjectiven Raumes auch aus den subjectiven Wahrnehmungen über die Vorgänge im objectiven Raum der xx etwas zu erforschen.

Im übrigen entspringt eine Fülle von Einzelproblemen aus dem Ansatz, ~~jedoch~~ denen ich bisher nicht nachgehen konnte ~~ist~~ und zuletzt, dass diese Auffassung alle bisherigen Formulierungen als Spezialfall enthält. +

~~Es~~ Sollte es sich zum Beispiel herausstellen, dass die Gravitation einen Einfluss auf die Polarisationsebene des Lichtes hat, so wäre damit ein Anlass gegeben den hier entwickelten Ansätzen ~~näher~~ weiter nachzugehen.

AUTOGRAPHE

de

Wirtinger

Wilhelm

OBSERVATIONS

M.a.s. 29 p. folio „Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung" Vorträge an der Universität Hamburg Juli 1925 (Gedruckt in den Abhandlungen des math. Seminars der Univ. Hamburg, auch Separatabdruck bei Teubner Leipzig) Mit Separatabdruck.

1./

W i r t i n g e r, Wilhelm.- Dr. phil.1887 Wien.-Dr.ph.h.c.1902, Christiania.-stud.1884-88 in Wien, 1889 in Berlin & Göttingen.-1890-95 Privatdocent an d.Univ.Wien, zugleich 1892-95, Assist.an d.techn. Hochschule.-1895 Prof.extr.& 1896 Prof.ord.d.Mathem. an d.Univ.Innsbruk,1903 Prof.ord. in Wien/Orig. 1904/-Dr.d.Naturwiss.e.h.1925 Hamburg, Sohn v.Dr.med.Joh.W./klin. Thermometrie, Entdecker d.Typhuskurve/.- o.Prof./Math.Univ.Wien/.- geb.1865, Juli 19, Ybbs/Donau/ Nieder-Oesterr./

Seit 1904 Mitherausg.der Monatshefte für Math.& Physik/m.Escherich & Mertens /.-

Untersuch.über Thetafunct.125 p.-gr.4°, Leipzig,1895.- B.Riemann's gesammelte Werke, Nachträge/mit M.Noether/,116 p.-gr.8°,ib.1902.- In der Encyclop.d.math.Wissensch. II,2.- Algebr.Funct.& ihre Integr. 60 p.gr.8°, id.

Acad.math. Probl.in d.Theorie d. Abel'schen Funct.24 p.-Anwendungen d.Euler-Maclaurin'schen Summenformel, insbes.auf e. Aufgabe von Abel 18 p./26,1902/.-

Clebsch,Math.Ann.- Untersuch.über Abel's Funct.v.Geschl.3,51 p./40, 1892/.- Riemann's Integrat.Meth.

AUTOGRAPHE

de

Wirtinger

Wilhelm

OBSERVATIONS

2./
f.hyperbol.Diff.Gleich.-Anwend. auf Schwing.Probl.,25 p./48,1897/.-
Deutsch .Mathem.Ver.Jahr.-Ber.-Bezieh.d.Kummer'schen Fläche zur projectiven Erzeug.d. ebenen Curven 4 Ordn.mit Doppelpunkt,2 p./4,1895/ Geodät.Linien & Poncelet'sche Polygone, 1 p./9,1900/.-
Göttinger Nachr.-Analogon.d. Kummer'schen Fläche für p= 3,6 p. /1889/.- Green's Funct.eines v. getrennten sphär.Mannigfaltigkeiten begrenzten Gebietes, 2 p. /1897/.-
Innsbruck, nat.med.Ver.Ber.-Zwei Bemerk.zu Airy's Theorie d. Regenbogens, 8 p./23,1898/.-
Wien, Akad.Ber.Rationale Raumcurven 4.Ordn.18 p./93,1886/.-Brennpunktscurve der räuml.Parabel 8 p./94,id./.- Theorie d.homog. lin.Diff.Gleich.m.algebr.Relat. zw.d.Fundamentalintegralen, 6 p. /98,1889/.- Funct.welche gewissen Functionalgleich .entsprechen, 7 p. /99,1890/.- Eigenschaft des Potentials unter Annahme eines Green'schen Wirkungsgesetzes, 11 p./105, 1896/.- Theorie d.automorphen Funct.v.n-Veränderlichen, 11 p. /108,1899/.- Hypergeom.Funct. & best.Integr.,7 p./111,1902/.-

3./
Verallgem.der hypergeom.Integr.13 p. /112,1903/.-
Wien,Monatsh.Math.Phys.-Ganzzahlige irreductible Gleich.,2 p.-Verallgemeiner.der Theorie d.Kummer'schen Fläche & ihrer Bezieh.zu den Thetafunct.zweier Var.15 p.-Ellipt. Modulfunct.4 p./1,1890/.- Theorie der Abel'schen Funct.v.Geschlechte 3.6 p./2,1891/.- Eigensch.d.Wendetan tang.d.Curven 3.Ordn.3 p./4,1893/.- Rectificat.algebr.Curven, 5 p./5, 1894.- Theorie d.2 n-fach period. Funct.29 & 25 p./6 & 7,1895 & 96/.-
Hersg. der Monatshefte d.Math. & Physik/m.Hans Hahn, früher m.G. v.Escherich/ seit 1921.-
In Verhdlgn.d.internat.3.Math. Congr. in Heidelberg.- Riemanns Vorlesgn.üb.d. hypergeometr.Reihe & ihre Bedeutg.19 S.1905.- D.Entwickelg.einiger math.Begriffe in neuerer Zeit, 20 S.Wien 06/auch in Wiener Acad.Almanach,20 S.06/.-
Bull.d.Sc.math.Darbaux.- Un théoréme de M.Hadamard relativ aux déterminants, 5 S./31,1907/.-
Cambridge,Phil.Soc.Trans.-A general infinitesimal geometry, in reference to the theory of relativity,10 S./22,1912-23/.-
D.Naturwissenschaften.- Klein & d.Math.d.letzten 50 Jahre,45 S./7,

AUTOGRAPHE

de

Wirtinger

Wilhelm

OBSERVATIONS

4./
1919/.-
Journ.f.d.reine & angewandt.Math.
Eine besondere Dirichletsche Reihe
6 S./129,1905.-
Wien,Akad.Denkschr.-Konforme Abbildg, d.Riemannschen Fläche durch
Abelsche Integrale,22 S./85,1910/.-
Wien, Akad.S.Ber.-D.Anzahl d.
linear unabhängigen hypergeometr.
Integrale nter Stufe,18 S./114,
1905/.- Theorie d.vollständ.Differentiale, 5 S./118,09/.- Eine
spez.Lösg.d.Diff.Gleichg.yy´´=
mz2,6 S./128,19/.-
Wien,Monatshefte f.Math.& Physik
Z.Hadamardschen Determinantensatz
3 S./18,1907/.- Bemerk.z.Partialbruchzerleg.2 S./31,21/.-